c) $\lim\limits_{h\to 0^+}\dfrac{f(h)-f(0)}{h-0}=\lim\limits_{h\to 0^+}\left[\dfrac{\frac{\ln(1+h)}{h}-1}{h}\right]=\lim\limits_{h\to 0^+}\dfrac{\ln(1+h)-h}{h^2}=-\dfrac{1}{2}$ $\Rightarrow$ f est dérivable à droite en 0 et $f'_d(0)=-\dfrac{1}{2}$. 2.a)Soit

$x\geq 0\ \forall t\in[0,x]:1+t\geq 1\Leftrightarrow\forall t\in[0,x]:(1+t)^2\geq 1+t\Leftrightarrow\forall t\in[0,x]:\dfrac{1}{(1+t)^2}\leq\dfrac{1}{1+t}$ et par suite : $\int_0^x\dfrac{1}{(1+t)^2}dt\leq\int_0^x\dfrac{1}{1+t}dt$.

b) Soit x ≥ 0on a : $\int_0^x\dfrac{1}{(1+t)^2}dt\leq\int_0^x\dfrac{1}{1+t}dt\Leftrightarrow\left[-\dfrac{1}{t+1}\right]_0^x\leq\left[\ln(1+t)\right]_0^x\Leftrightarrow-\dfrac{1}{x+1}+1\leq\ln(1+x)\Leftrightarrow\dfrac{x}{x+1}\leq\ln(1+x)$

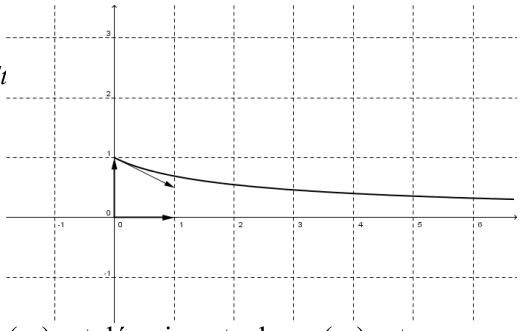
$\Leftrightarrow\dfrac{x}{1+x}-\ln(1+x)\leq 0$.

c) la fonction : $x\mapsto 1+x$ est dérivable et strictement positive sur $\mathbb{R}_+$. Et par suite f est dérivable sur $\mathbb{R}_+$.

x	0		+∞
f'(x)	0	—	
f(x)	1	↘	0

$\forall x>0;\ f'(x)=\dfrac{x.\frac{1}{1+x}-1.\ln(1+x)}{x^2}=\dfrac{\frac{x}{1+x}-\ln(1+x)}{x^2}\leq 0$ D'après la question A-2-b).

3.Voir tableau de variation et la courbe.



B-1. $\forall n\in\mathbb{N}:u_{n+1}-u_n=\int_0^a t^{n+1}f(t)dt-\int_0^a t^n f(t)dt=\int_0^a t^n f(t).(t-1)dt$

Or $\forall t\in[0,a]\subset[0,1]$ on a : $t^n\geq 0; f(t)\geq 0$ et $t-1\leq 0\Rightarrow$

$\forall t\in[0,a]\ on\ a: t^n f(t)(t-1)\leq 0$ et par suite $\int_0^a t^n f(t)(t-1)dt\leq 0\Rightarrow$

$u_{n+1}-u_n\leq 0$ donc (u_n) est une suite décroissante.

2.a) $\forall n\in\mathbb{N};\forall t\in[0,a]$ on a : $t^n\geq 0; f(t)\geq 0\Rightarrow\forall n\in\mathbb{N}: t^n f(t)\geq 0$

$\Rightarrow\forall n\in\mathbb{N}:u_n=\int_0^a t^n f(t)dt\geq 0$. Donc (u_n) est minorée par 0 de plus (u_n) est décroissante donc (u_n) est convergente.

3.a) f est décroissante sur IR_+ donc : pour tout réel $x\geq 0$, $f(x)\leq f(0)=1$.

b) $\forall n\in\mathbb{N};\forall t\in[0,a]: f(t)\leq 1\Leftrightarrow\forall n\in\mathbb{N};\forall t\in[0,a]: t^n f(t)\leq t^n\Rightarrow\forall n\in\mathbb{N}:\int_0^a t^n f(t)dt\leq\int_0^a t^n dt$ $\forall n\in\mathbb{N}:u_n\leq\left[\dfrac{t^{n+1}}{n+1}\right]_0^a$

$\Leftrightarrow\forall n\in\mathbb{N};u_n\leq\dfrac{a^{n+1}}{n+1}$ c) $\forall n\in\mathbb{N};u_n\leq\dfrac{a^{n+1}}{n+1}$ de plus $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{a^{n+1}}{n+1}=0\ car\ a\in]0,1]$ d'où $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=0$

Exercice N°14: 1.a) $0\leq x\leq 1\ alors\ 1\leq x+1\leq 2\ donc\ 0\leq\ln(x+1)\leq\ln 2$ d'où $0\leq x^n\ln(x+1)\leq\ln(2).x^n$

$\Rightarrow\int_0^1 0dx\leq\int_0^1 x^n\ln(1+x)dx\leq\int_0^1 x^n\ln 2\,dx\ \Leftrightarrow 0\leq U_n\leq\left[\dfrac{x^{n+1}}{n+1}\right]_0^1$ comme $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{\ln 2}{n+1}=0$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty}U_n=0$.

b) $\bullet\int_0^1\dfrac{x^2}{x+1}dx=\int_0^1\dfrac{x^2-1+1}{x+1}dx=\int_0^1\left(x-1+\dfrac{1}{x+1}\right)dx=\left[\dfrac{1}{2}x^2-x+\ln(x+1)\right]_0^1=-\dfrac{1}{2}+\ln 2$

$\bullet U_1=\int_0^1 x\ln(1+x)dx$ posons : $\begin{pmatrix}u(x)=\ln(1+x)\Rightarrow u'(x)=\dfrac{1}{1+x}\\ v'(x)=x\Leftarrow v(x)=\dfrac{1}{2}x^2\end{pmatrix}$ donc $U_1=\left[\dfrac{1}{2}x^2\ln(x+1)\right]_0^1-\dfrac{1}{2}\int_0^1\dfrac{x^2}{x+1}dx=$

$\dfrac{1}{2}\ln 2-\dfrac{1}{2}\left(-\dfrac{1}{2}+\ln 2\right)=\dfrac{1}{4}$.

Qarray.tn - Agra Blech - Qarray.tn - Agra Blech - Qarray.tn
Devoir.tn Toutes les matières, tous les niveaux...